



С.Н. Зиненко

Математический анализ

Ряды и интегралы с параметром

(сборник задач)

2017

41. Сходимость несобственных интегралов

Выяснить сходимость интегралов по неограниченному промежутку	
<p>№ 41.1. $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x+1} dx$</p> <p>№ 41.2. $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx$</p> <p>№ 41.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$</p> <p>№ 41.4. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$</p> <p>№ 41.5. a) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}^4} dx$, b) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$, c) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}^2} dx$</p> <p>№ 41.6. a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}^4 \ln x}$, b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$, c) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}^2 \ln x}$</p> <p>№ 41.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{e^x} dx$</p>	<p>№ 41.1. $\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4+2x^2+1} dx$</p> <p>№ 41.2. $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}^4}{x^2-1} dx$</p> <p>№ 41.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$</p> <p>№ 41.4. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$</p> <p>№ 41.5. a) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x}^7} dx$, b) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$, c) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x}^4} dx$</p> <p>№ 41.6. a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}^7 \ln^2 x}$, b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, c) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}^4 \ln^2 x}$</p> <p>№ 41.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{e^x} dx$</p>
Выяснить сходимость интегралов от неограниченной функции	
<p>№ 41.8. $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{\ln(1+x)} dx$</p> <p>№ 41.9. $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{e^{\arcsin x}-1} dx$</p> <p>№ 41.10. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2-x} dx$</p> <p>№ 41.11. a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} dx$</p>	<p>№ 41.8. $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\arcsin x} dx$</p> <p>№ 41.9. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} dx$</p> <p>№ 41.10. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x^3-x} dx$</p> <p>№ 41.11. a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}^3} dx$, b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}^3 \ln x} dx$</p>
Выяснить сходимость интегралов	
<p>№ 41.12. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}^4} dx$</p>	<p>№ 41.12. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} x \sqrt[3]{x}^2} dx$</p>

42. Числовые ряды. Признаки сравнения

Выяснить сходимость рядов	
№ 42.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+1}$	№ 42.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^2+1}$
№ 42.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$	№ 42.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}^4}{n^2-1}$
№ 42.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$	№ 42.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt[3]{n+1}}$
№ 42.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$	№ 42.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$
№ 42.5. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}^4}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}^2}$	№ 42.5. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n}^7}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt[5]{n}^4}$
№ 42.6. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}^4 \ln n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}^2 \ln n}$	№ 42.6. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}^7 \ln^2 n}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}^4 \ln^2 n}$
№ 42.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{e^n}$	№ 42.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+1}}{e^n}$
№ 42.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$	№ 42.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})$
№ 42.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-1}$	№ 42.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{1000n-1}$
№ 42.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$	№ 42.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2})$
№ 42.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$	№ 42.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \arcsin \frac{1}{4^n}$
№ 42.12. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$	№ 42.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{5}^n \operatorname{tg} \frac{1}{2^n}$

43. Числовые ряды. Признаки Даламбера, Коши, Лейбница

Выяснить сходимость знакоположительных рядов	
№ 43.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	№ 43.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$
№ 43.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!!}$	№ 43.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$
№ 43.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$	№ 43.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{4^n n!}$
№ 43.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	№ 43.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$
№ 43.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$	№ 43.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
№ 43.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{1}{n}$	№ 43.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$
№ 43.7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$	№ 43.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$
№ 43.8. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$	№ 43.8. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3}$
Выяснить сходимость знакочередующихся рядов. Уточнить характер сходимости (абсолютно или условно)	
№ 43.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	№ 43.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
№ 43.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$	№ 43.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^3}}$
№ 43.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4} \ln n}$	№ 43.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^7} \ln^2 n}$
Выяснить абсолютную сходимость знаконе постоянных рядов	
№ 43.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha n}{n^2}$	№ 43.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\alpha}{n^3}$
Рассмотрев соответствующий ряд, доказать, что	
№ 43.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	№ 43.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$
№ 43.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$	№ 43.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

44. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Найти область сходимости степенных рядов	
№ 44.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$	№ 44.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3 + 1}}$
№ 44.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$	№ 44.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$
№ 44.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$	№ 44.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n}$
№ 44.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n + 1)!!}$	№ 44.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!!}$
№ 44.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n n x^n$	№ 44.5. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$
Найти суммы степенных рядов	
№ 44.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1}$	№ 44.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n - 1}$
№ 44.7. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$	№ 44.7. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2) x^n$
Найти сумму числового ряда	
№ 44.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$	№ 44.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$	
№ 44.9. $f(x) = \frac{5}{x^2 + x - 6}$	№ 44.9. $f(x) = \frac{5}{x^2 - 3x - 4}$
№ 44.10. $f(x) = \operatorname{ch} x$	№ 44.10. $f(x) = \operatorname{sh} x$
№ 44.11. $f(x) = \operatorname{arctg} x$	№ 44.11. $f(x) = \arcsin x$
Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, найти интеграл с точностью $\varepsilon = 0.001$	
№ 44.12. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$	№ 44.12. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

45. Ряды Фурье

<p>Разложить функцию в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, +\pi]$. Построить график суммы ряда Фурье. Полагая $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, найти суммы получающихся числовых рядов</p>	
<p>№ 45.1. $f(x) = x$</p> <p>№ 45.2. $f(x) = x$</p> <p>№ 45.3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq +\pi \end{cases}$</p> <p>№ 45.4. $f(x) = \sin \alpha x$</p>	<p>№ 45.1. $f(x) = 1$</p> <p>№ 45.2. $f(x) = \operatorname{sign} x$</p> <p>№ 45.3. $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq +\pi \end{cases}$</p> <p>№ 45.4. $f(x) = \cos \alpha x$</p>

46. Ряды Фурье по *Cos* и по *Sin*

<p>Разложить функцию в ряд Фурье. Построить график суммы ряда Фурье. Полагая $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, найти суммы получающихся числовых рядов.</p>	
<p>№ 46.1. $f(x) = x^2$ $a) -\pi \leq x \leq +\pi, \quad b) 0 \leq x \leq 2\pi$</p>	<p>№ 46.1. $f(x) = x^3$ $a) -\pi \leq x \leq +\pi, \quad b) 0 \leq x \leq 2\pi$</p>
<p>Разложить функцию в ряд Фурье. Построить график суммы ряда Фурье.</p>	
<p>№ 46.2. $f(x) = x^2$ $a) -l \leq x \leq +l, \quad b) 0 \leq x \leq 2l$</p>	<p>№ 46.2. $f(x) = x^3$ $a) -l \leq x \leq +l, \quad b) 0 \leq x \leq 2l$</p>
<p>Разложить функцию в ряд по <i>Cos</i>, по <i>Sin</i>, Фурье. Построить графики сумм полученных рядов.</p>	
<p>№ 46.3. $f(x) = x^2$ $a) 0 \leq x \leq \pi, \quad b) 0 \leq x \leq l$</p>	<p>№ 46.3. $f(x) = x^3$ $a) 0 \leq x \leq \pi, \quad b) 0 \leq x \leq l$</p>

47. Интегралы Фурье. *Cos*- и *Sin*-преобразования Фурье

Представить функцию интегралом Фурье	
№ 47.1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{cases}$	№ 47.1. $f(x) = \begin{cases} \alpha - x , & x < \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{cases}$
№ 47.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x < \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{cases}$	№ 47.2. $f(x) = \begin{cases} \alpha - x , & x < \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{cases}$
№ 47.3. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$	№ 47.3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
№ 47.4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < +\infty \end{cases}$	№ 47.4. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0 \\ 0, & 0 < x < +\infty \end{cases}$
Найти <i>Cos</i> - (<i>Sin</i> -) преобразование Фурье функции и восстановить по нему данную функцию	
№ 47.5. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < +\infty$	№ 47.5. $f(x) = e^x, \quad -\infty < x < 0$
Найти преобразование Фурье функции и восстановить по нему данную функцию	
№ 47.6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < +\infty \end{cases}$	№ 47.6. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0 \\ 0, & 0 < x < +\infty \end{cases}$

48. Интегралы с параметром

Найти интегралы, зависящие от параметра ($\alpha, \beta > 0$)	
№ 48.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha x^2)}{x^2} dx$	№ 48.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x)}{\sqrt{x}^3} dx$
№ 48.2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$	№ 48.2. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} dx$
№ 48.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x^2 - \operatorname{arctg} \beta x^2}{x} dx$	№ 48.3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$
№ 48.4. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx$	№ 48.4. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} \right)^2 dx$
№ 48.5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \gamma x dx$	№ 48.5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos \gamma x dx$

49. Интеграл Эйлера-Пуассона

Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти интегралы с параметром $(\alpha, \beta > 0)$	
№ 49.1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$	№ 49.1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\sqrt{x}^3} dx$
№ 49.2. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)} dx$	№ 49.2. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
№ 49.3. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx$	№ 49.3. $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx$
№ 49.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{1 + x^2} dx$	№ 49.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{1 + x^2} dx$

50. Эйлеровы интегралы

С помощью Эйлеровых интегралов найти следующие интегралы	
№ 50.1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^5} \sqrt{x}^{13} dx$	№ 50.1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} \sqrt{x}^{13} dx$
№ 50.2. $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2}^7 dx$	№ 50.2. $\int_0^1 x^{13} \sqrt[3]{1-x^3}^4 dx$
№ 50.3. $\int_0^1 \sqrt[6]{x} \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}^{11} dx$	№ 50.3. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}^5 \sqrt{1-\sqrt{x}}^3 dx$
№ 50.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}^7}{(1+x)^6} dx$	№ 50.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{x}^{11}}{(1+x)^5} dx$
№ 50.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{11}}{(1+x^3)^6} dx$	№ 50.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{13}}{(1+x^2)^6} dx$
№ 50.6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cdot \cos^6 x dx$	№ 50.6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cdot \cos^4 x dx$
№ 50.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^{11} x \cdot \cos^9 x} dx$	№ 50.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^7 x \cdot \cos^{13} x} dx$